[illegible] FEBR '06

1) Suponiendo que las siguientes matrices son regulares y del mismo orden. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $(X^t A)^t + (X^t B)^t = (A+B)^t$

b) $B^{-1}X + AX = (X^{-1}B)^{-1} + AB$

---

a)

$$A^t X + B^t X = A^t + B^t$$

$$(A^t + B^t) X = (A^t + B^t) \Rightarrow X = I$$

b) $B^{-1} X + AX = (X^{-1} B)^{-1} + AB$

~~$(B^{-1}+A)X = B^{-1} X + AB$~~

~~$B^{-1}+A$~~ $B^{-1} X + AX = B^{-1} X + AB$

$$AX = AB \Rightarrow X = B$$

---

2) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$. Calcúlese el valor numérico de los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 2f & 2e & 2d \\ 2c & 2b & 2a \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} f & e & d \\ c & b & a \\ i & h & g \end{vmatrix} = -2^3 \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} =$$

$$= +2^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2^3 \cdot 3 = 24$$

FEBR' 06

(2) Discutir y resolver para los diferentes valores de a y b ~~los~~ el siguiente sistema y resolver en el caso de infinitas soluciones

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ ax+y-z=b \\ 3x+y+z=2 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & -1 & b \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = a-7 \Rightarrow \begin{array}{ll} a\neq 7 & r(A)=3 \Rightarrow \text{S.C.D. } \forall b \\ a=7 & r(A)=2 \end{array}$$

$\underline{a=7}$ $(r(A)=2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & b \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2b-6 \Rightarrow \begin{cases} b=3;\ r(A_b)=2 & \text{S.C.Ind.} \\ b\neq 3 \quad r(A_b)=3 & \text{S.Inc.} \end{cases}$$

$\underline{a\neq 7}$

$$x = -\frac{6-b}{a-7}, \quad y = \frac{-2-4a+5b}{a-7}, \quad z = \frac{2(a-b-1)}{a-7}$$

$\underline{a=7,\ b=3}$ (comp. indet.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=0 \\ 7x+y-z=3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=-2z \\ 7x+y=-z \end{array}\right\} \quad z=\alpha \quad 6x=\alpha,\ x=\frac{\alpha}{6}$$

$$y=-2\alpha-\frac{\alpha}{6}=-\frac{13}{6}\alpha$$

~~a~~ =

3 FEBR'06

CAMBIO DE BASE

LAS COORDENADAS DEL VECTOR $\vec{u}=(1,2)$ SON $(3,4)$ CUANDO SE REFIEREN A UNA BASE $B=\{\vec{u}_1=(a,b);\vec{u}_2=(c,d)\}$ DE $\mathbb{R}^2$, Y LAS COORDENADAS DEL VECTOR $\vec{v}=(3,4)$ SON $(1,2)$ CUANDO SE REFIEREN A ESTA MISMA BASE. OBTENER LA BASE B.

DATOS:
$$\begin{cases}\vec{u}=(1,2)=(3,4)_B\\ \vec{v}=(3,4)=(1,2)_B\end{cases}$$

$$B=\{\vec{u}_1=(a,b)\ ;\ \vec{u}_2=(c,d)\}$$

* POR DEFINICIÓN DE COORDENADAS EN UNA BASE

$$\begin{cases}\vec{u}=(1,2) \quad (1)\\ \vec{u}=(3,4)_B=3\cdot\vec{u}_1+4\cdot\vec{u}_2=3(a,b)+4(c,d)=\end{cases}$$

$$=(3a+4c,\ 3b+4d) \quad (2)$$

$$(1)=(2)\Rightarrow\boxed{\begin{cases}3a+4c=1\\ 3b+4d=2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}\vec{v}=\boxed{(3,4)}\\ \vec{v}=(1,2)_B=1\cdot\vec{u}_1+2\cdot\vec{u}_2=1\cdot(a,b)+2(c,d)=\end{cases}$$

$$=\boxed{(a+2c,\ b+2d)}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}a+2c=3\\ b+2d=4\end{cases}}$$

RESOLVIENDO CONJUNTAMENTE:

$$\begin{cases} 3a+4c=1 \\ a+2c=3 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b+4d=2 \\ b+2d=4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} 3a+4c=1 \\ a+2c=3 \end{matrix}\right\} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 3a+4c=1 \\ 2a+4c=6 \end{cases}$$

$$\ominus: \boxed{a=-5} \rightarrow c=\frac{3-a}{2}=\boxed{4=c}$$

$$\left.\begin{matrix} 3b+4d=2 \\ b+2d=4 \end{matrix}\right\} \times 2 \Rightarrow \begin{cases} 3b+4d=2 \\ 2b+4d=8 \end{cases}$$

$$\ominus \ \boxed{b=-6} \rightarrow d=\frac{4-b}{2}=\boxed{5=d}$$

$$\Rightarrow \boxed{B=\{(-5,-6);(4,5)\}}$$

* POR ESQUEMAS MATRICIALES

$$\vec{u}=\underset{Bc}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}=\underset{B/Bc}{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+4c\\3b+4d\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}3a+4c=1\\3b+4d=2\end{cases}}$$

$$\vec{v}=\underset{Bc}{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}=\underset{B/Bc}{\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}}\underset{B}{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2c\\b+2d\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}a+2c=3\\b+2d=4\end{cases}}$$

(4) FEBR'06

Dada la aplicación ~~lineal~~ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, -x_1 + 2x_2, x_3)$$

a) Decir si es lineal

b) Hallar su matriz asociada en las bases canónicas A

c) Hallar su núcleo y su imagen. Clasificarla. Definir, si es posible, f^{-1} y su matriz asociada

d) ¿Qué valor debe tener "a" para que el vector $(2, 1, a)$ pertenezca a la imagen de f?

(5)

a) Diagonalizar A si es posible → $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = A$

$\lambda = 3 \Leftrightarrow (-1, 1, 0)$

FEBR'05

b) Calcular A^{100} y $|A^{100}|$

c) Escribir la forma cuadrática asociada con la matriz A y clasificarla.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$

$\text{Ker} f = \{\vec{0}\}$

$\text{Det}(A) = 3$, $r(A) = 3$

f es inyectiva

Puesto que $r(A)=3$; $\dim \operatorname{Im} f = 3$

$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

La aplicación es biyectiva.

Como es bicectiva admite inversa. La matriz asociada a f^{-1} es A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

d)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

Este sistema es siempre compatible luego $\forall a \in \mathbb{R}$ el vector propuesto pertenece a la imagen

e) Valores propios $\lambda = 3$, $\lambda = 1$ doble

Su espacios propios

$\lambda = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$

$S(1) = \{(\alpha, \alpha, \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$\lambda = 3$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{array} \right.$ $x_1 = -x_2 = -\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 0$

$S(3) = \{(-\alpha, \alpha, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Es diagonalizable

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix};\quad P=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$D=P^{-1}AP \Rightarrow A=PDP^{-1}$$

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Luego

$$A^{\not{100}\,10}=PD^{100}P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3^{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&1\\0&3^{100}&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-3^{100}&-1\\1&3^{100}&0\\1&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\not{3^{100}}\begin{pmatrix}1&-3^{100}&-1\\1&3^{100}&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$|A^{100}|=\frac{1}{2}\not{3^{100}}\begin{vmatrix}1&-3^{100}&-1\\1&3^{100}&0\\1&0&1\end{vmatrix}=\not{\frac{1}{2}3^{100}\cdot 3}=\frac{1}{2}3^{100}$$

g)

g)

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2$$

Como sus valores propios son todos positivos es def. pos.

FEBR'06

6 Dado el conjunto

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1 < 2,\ 1 \leq x_2 \leq 3\} \cup \{(3, 3)\}$$

a) Representarlo gráficamente

b) Decir si es abierto o cerrado.

d) Es un conjunto acotado?

i) Como debería variar la definición de A para que ~~fuera~~ ~~compacto~~ cerrado?

(1) Junio'06

(a) SIMPLIFICAR LA EXPRESIÓN MATRICIAL (A y B MISMO ORDEN)

$$(A+B)^2-(A-B)^2-2A\cdot(A+B)$$

Rta: $(A+B)(A+B)-(A-B)(A-B)-2A^2-2AB=$

$=A^2+AB+BA+B^2-(A^2-AB-B\cdot A+B^2)-$

$-2A^2-2AB=$

$=\cancel{A^2}+\cancel{AB}+BA+\cancel{B^2}-\cancel{A^2}+\cancel{AB}+BA-\cancel{B^2}-$ (QUEDA, QUEDA)

$-2A^2-\cancel{2AB}=2BA-2A^2=$ (QUEDA)

$$=\boxed{2(B-A)\cdot A}$$

(b) SIENDO A MATRIZ DE 4º ORDEN TAL QUE $|A|=3$, CALCULAR:

* $|2A|=2^4\cdot|A|=16\cdot 3=48$

$|K\cdot A|=K^n\cdot|A|$
(n = orden de A)

* $2|A|+|-A|=2|A|+(-1)^4\cdot|A|=$

$=2|A|+|A|=3|A|=3\cdot 3=9$

(2) JUNIO'06

MATRICES / SUBESPACIO VECTORIAL

3) Siendo $\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ~~(la simétrica de 2º orden)~~
$\neq 0$

1º) Probar que $\mathcal{M}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$
2º) Una base de $\mathcal{M}$ y la dimensión del subespacio y $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ coord. en su base
3º) Determinar las matrices $M \in \mathcal{M}$ que verifican que $M^2 = 2M$

1º) SUBESPACIO: Dos condiciones para ser subespacio vectorial

a) $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{M} \\ B \in \mathcal{M} \end{array}\right\} \Rightarrow A + B \in \mathcal{M}$

b) $\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{M} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha A \in \mathcal{M}$

a) $\left.\begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} A + B = \begin{pmatrix} \underbrace{a_1 + a_2}_{a} & \underbrace{b_1 + b_2}_{b} \\ \underbrace{b_1 + b_2}_{b} & \underbrace{a_1 + a_2}_{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$

2º) $B_{\mathcal{M}}$: $M \in \mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$

$a = 1 ; b = 0 \rightarrow M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $a = 0 ; b = 1 \rightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_{\mathcal{M}} = \{ M_1 ; M_2 \}$$

BASE $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ M_1 y M_2 generadoras de $\mathcal{M}$

$\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 = (0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ L. INDEP.

3º) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$: $M^2 = 2M$

$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$

$$M^2 = 2M \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 2a \\ 2ab = 2b \rightarrow ab - b = 0 \; ; \; b(a-1)=0 \end{cases}$$

$$\overset{2^a ec}{\Longrightarrow} \; b=0 \; ; \; a=1$$

$\underline{b=0} \xrightarrow{1^a ec} a^2 + 0 = 2a \rightarrow a^2 - 2a = 0$

$a(a-2)=0 \Rightarrow a=0$; $a=2$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Comprobamos: $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$2M = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ } sí

$\underline{a=1} \xrightarrow{1^a ec} 1 + b^2 = 2 \cdot 1 \; ; \; b^2 = 1 \rightarrow b=1$; $b=-1$

$$\Rightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \; ; \; \boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$2M = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ } sí

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$2M = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ } sí

2º) COORD DE $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ EN BASE $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$M = (2, 4)_B$

③ JUNIO'06

APLICACIÓN LINEAL

DADA APL. LIN. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z) = (mx-3y-z,\ 2y+2z,\ mx+ny+3z)$$

1º) m y n : PARA QUE LA IMAGEN DEL VECTOR $\vec{u}=(1,-1,1)$ SEA EL VECTOR $\vec{v}=(3,0,3)$

* POR LA DEFINICIÓN DE f: $f(1,-1,1) = (3,0,3) \Rightarrow$

(o POR $Y = A.X$)

$\Rightarrow (m+3-1,\ -2+2,\ m-n+3) = (3,0,3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2=3 \longrightarrow \boxed{m=1} \\ 0 = 0 \quad (\text{sí}) \\ m-n+3=3 \Rightarrow m=n \end{cases} \Rightarrow \boxed{n=1}$$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (x-3y-z,\ 2y+2z,\ x+y+3z)$

2º) EXPRESAR LA MATRIZ DE f, REFERIDA A LA Bc DE $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (1,0,1) \\ f(0,1,0) = (-3,2,1) \\ f(0,0,1) = (-1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

3º) OBTENER NÚCLEO E IMAGEN, (CITANDO BASE SENCILLA DE AMBOS Y SU DIMENSIÓN)

* NÚCLEO : $A.X = (0)$ ó $f(x,y,z)=0$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

SIST. HOMOGÉNEO $\begin{cases} x-3y-z=0 \\ \cancel{2}y+\cancel{2}z=0 \end{cases}$

$|A| = 6-6+2-2=0 \Rightarrow r(A)<3$

$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow r(A)=2 \rightarrow 2$ ECS $<$ nº incóg $\Rightarrow$ SOLUC. $\neq$ TRIVIAL

$\boxed{z=\alpha} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3y=\alpha \\ \boxed{y=-\alpha} \end{array} \right\} \Rightarrow x=\alpha+3(-\alpha);$

$\boxed{x=-2\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{N(f)=\{(-2\alpha,-\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}^3 \; ; \alpha\in\mathbb{R}\}}$

$\boxed{B_{N(f)}=\{(-2,-1,1)\}}$; $\boxed{\dim(N(f))=1}$

* IMAGEN : $r(A)=2 \rightarrow$ TOMAR 2 COLUMNAS

$\boxed{B_{Im(f)}=\{(1,0,1);(-3,2,1)\}}$

~~$\vec{v}\in Im(f) \Leftrightarrow \alpha.$~~

$\boxed{Im(f)}=\{\alpha(1,0,1)+\beta(-3,2,1)\}=\boxed{\{(\alpha-3\beta,2\beta,\alpha+\beta)\}}$

$(\dim Im(f)=r(A)=2)$

EC. CARTESIANAS DE $Im(f)$: $(x,y,z)=\alpha(1,0,1)+\beta(-3,2,1)=(\alpha-3\beta,2\beta,\alpha+\beta)$

(NO) $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha-3\beta=x \\ 2\beta=y \\ \alpha+\beta=z \end{array} \right. \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y-z=0$

4º) CLASIFICAR f (INY ; SUPRAYECTIVA ; BIY. ; NINGUNA)

- INY : $N(f)=\{\vec{0}\}$ ó $\dim(\text{IMAG})=\dim(\text{ESP. INICIAL})$
- SUPRAY : $\dim(\text{IMAG})=\dim(\text{ESP. FINAL})$
- BIY = INY + SUPRAY

$r(A)=2=\dim(\text{IMAG}) \Rightarrow \dim(\text{IMAG})\neq\dim(\text{E. FINAL})$

$\Rightarrow$ NO SUPRAYECTIVA

$\dim N(f)\neq 0$ ó $\dim(\text{IMAG})\neq\dim(\text{E. INICIAL}) \Rightarrow$ NO INYECT

5º) RAZONAR SI EXISTE LA APLIC. LINEAL INVERSA f^{-1}

NO $\exists f^{-1}$ YA QUE f NO ES BIYECTIVA

(TBIÉN : $|A|=0 \rightarrow \nexists A^{-1} \Leftrightarrow \nexists f^{-1}$)

(4) **DIAGONALIZACIÓN Y POTENCIA** — JUNIO'06

DADA $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{pmatrix}$

1º) Determinar los elementos $\underline{a}$, $\underline{b}$ y $\underline{c}$ sabiendo que el vector $\vec{p} = (1,1,1)$ es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio $\lambda = -2$

2º) Para los valores obtenidos, diagonalizar la matriz citando la forma diagonal (D) y la correspondiente matriz diagonalizadora

3º) Obtener (aplicando lo anterior) A^n ($n = n^o$ natural) A^8

4º) ESCRIBIR Y CLASIFICAR LA F.C. QUE DEFINE A (A) POR MATRIZ ASOCIADA

1º) $A = \begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c \end{pmatrix}$

DATO: $\lambda = -2 \Rightarrow \vec{p} = (1,1,1)$

$$(A - \lambda I)\cdot \vec{p} = \vec{0} \quad \text{PARA} \left\{ \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \vec{p} = (1,1,1) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2 & -1 & -1 \\ -1 & b+2 & -1 \\ -1 & -1 & c+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+2-1-1=0 \rightarrow a=0 \\ b+2-1-1=0 \rightarrow b=0 \\ c+2-1-1=0 \rightarrow c=0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2º) **DIAGONALIZAMOS A**

* **VALORES PROPIOS**: $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

– SUMAR FILAS (COL) O POR SARRUS

SUMANDO FILAS : $F_1' = f_1 + f_2 + f_3 = (-2-\lambda)$ en toda la F_1

$\Rightarrow$ SACAR FACTOR $(-2-\lambda)$ DE ESA L

$$\Rightarrow (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

(Ceros en C_1)

$$= (-2-\lambda)(1-\lambda)^2 \begin{cases} \lambda = 1 \text{ DOBLE} \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

POR SARRUS : $-\lambda^3 - 1 - 1 + \lambda + \lambda + \lambda = 0;$

$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow$ RUFFINI

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0

$\rightarrow \lambda = 1$

$\rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$

ES DECIR : $\lambda = 1$ (DOBLE) ; $\lambda = -2$

* VECTORES PROPIOS : $(A - \lambda_i I)\cdot \vec{p} = \vec{0}$

$\lambda = 1$ (DOBLE) $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -x-y-z=0$

$\Leftrightarrow x+y+z=0$

rango $=1 \rightarrow$ 1 ec

$x = -y-z : \begin{cases} x = -\alpha-\beta \\ y = \alpha;\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \vec{p} = (-\alpha-\beta, \alpha, \beta) \begin{cases} \vec{p_1} = (-1,1,0) \\ \vec{p_2} = (-1,0,1) \end{cases}$

$(\dim(E) = 2 = m_i)$

$\lambda = 2 \rightarrow \vec{p} = (1,1,1)$ (DATO) : $\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Rightarrow \begin{cases} +2x+y+z=0 \\ +x+2y+z=0 \end{cases}$ $(z=\alpha)$ $\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-\alpha \\ x+2y=-\alpha \end{cases}$ $r=2 \rightarrow$ 2 ECS.

$\Rightarrow x=y=z=\alpha \Rightarrow \vec{p} = (\alpha,\alpha,\alpha)$

* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ CON $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot Adj\,(P^T)$$

$|P| = 1+1+1 = 3 \neq 0$

$$P^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Adj\,(P^T) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ (-2)^n & (-2)^n & (-2)^n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2+(-2)^n & -1+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1+(-2)^n & 2+(-2)^n & -1+(-2)^n \\ -1+(-2)^n & -1+(-2)^n & 2+(-2)^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} m & h & h \\ h & m & h \\ h & h & m \end{pmatrix} ; \begin{cases} m = 2+(-2)^n \\ h = -1+(-2)^n \end{cases}$$

4º) F.C.! $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$Q = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

VALORES PROPIOS: $\lambda = 1$ doble, $\lambda = -2$ $\Rightarrow$ POSIT. y NEG. $\Rightarrow$ INDEFINIDA

(5) JUNIO'06

ESPACIO EUCLIDEO

1º) HALLAR a, b Y c PARA QUE LOS SIGUIENTES VECTORES DE $\mathbb{R}^3$ SEAN ~~MUTUAMENTE~~ ORTOGONALES ENTRE ELLOS: $\vec{v_1} = (1,1,a)$; $\vec{v_2} = (1,b,0)$; $\vec{v_3} = (c,0,1)$

$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0 : 1 + b + 0 = 0 \rightarrow b = -1$

$\vec{v_1} \perp \vec{v_3} \iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = 0 : c + 0 + a = 0 \rightarrow a + c = 0$

$\vec{v_2} \perp \vec{v_3} \iff \vec{v_2} \cdot \vec{v_3} = 0 : c + 0 + 0 = 0 \rightarrow c = 0$

$\Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow \boxed{a = 0 \ ; b = -1 \ ; c = 0}$

2º) ¿Forman una base de $\mathbb{R}^3$?

3º) Normalizar el vector $\vec{v_1}$

4º) $d(\vec{v_1}, \vec{v_2}) = ?$